数理解析研究所講究録
第 1738 巻 2011 年 19-23

Quantum Schubert vs affine Schubert via nilpotent Toda lattice

池田 岳　岡山理科大学

概要

戸田格子方程式の冪零解を介して，アフィン・グラスマン多様体のホモロジーと旗多様体の量子コホモロジーの明示的な対応が付くという T. Lam と M. Shimozono による最近の結果を紹介する．

1 はじめに

G を複素半単純線型代数群とする．Peterson は旗多様体 G/B の量子コホモロジー環とアフィン・グラスマン多様体 $\mathcal{G}_G$ のホモロジー環（！）の間の密接な関係を見抜いた．Lam–Shimozono [LS] は Peterson の結果を踏まえて，$G = SL_n(\mathbb{C})$ の場合に「Schubert 多項式」のレヴェルでの明示的な対応を与えている．その対応を具体的に与える役目を果たすのが冪零な戸田格子方程式のタウ関数である．

旗多様体の量子コホモロジー，アフィン・グラスマン多様体のホモロジーの両方の記述において戸田格子が関係しているということは，少なくとも表面的な意味では以前からよく知られていた．そんな風に目の前に戸田格子があったにも関わらず，この結果を見せられて，とても驚いてしまった．

この記事／講演の目的は，Lam–Shimozono による結果の紹介とその背景を説明することである．講演を申し込んだときには論文 [LS] がまだ出ていなかったので，2010 年の 7 月にトロントで行われた集会[*1]での Lam の講演と，その後に彼ら二人と話してわかったこと，それから 2008 年に来日した Lam と議論したことをもとにしてこの研究集会の話を組み立てようと考えた．だが，予想[*2]に反して，ちょうどこの研究集会の期間にプレプリントが出たので「いち早く紹介する」という意義は薄れてしまった．[LS] そのものは純粋に組合せ論的で明解なものなので，ここでは論文に書かれていない背景に重点をおいて説明することにする．ただし，理由がよくわかっていないけれども，絶妙につじつまが合っている，という話に終始することをあ

[*1] July 12-15, 2010, Affine Schubert Calculus Workshop at the Fields Institute.
[*2] 彼らの前の仕事 [LS0] に付け足す「ちょっとした観察」という類のものであって，その結果だけで論文を書くつもりが無いのではないかと勝手に想像していた．

らかじめお断りしておく．一見関係のなさそうな話を羅列するけれども，最後までがまんして読んでいただければ，確かに意味ありげな関係がある，ということを納得してもらえると思う．

2 アフィン・グラスマン多様体と旗多様体

多様体の定義など幾何的な背景は省く．どのような環が現れて，その環の表示や変数にどのような意味合いが有るのかということだけを説明する．詳しい定義などは [LS] やその参考文献をご覧いただきたい．

2.1 アフィン・グラスマン多様体のホモロジー

以下 $G = SL_n$ とする．アフィン・グラスマン多様体のホモロジー環 $H_*(\mathcal{G}_{SL_n})$ の実現として以下の２通りを紹介しよう：

$$(1)\ H_*(\mathcal{G}_{SL_n}) \cong \mathbb{C}[h_1, \ldots, h_{n-1}], \quad (2)\ H_*(\mathcal{G}_{SL_n}) \cong \mathbb{C}[(G^\vee)_{e^\vee}].$$

(1) は Bott によるもので $h_1, \ldots, h_{n-1}$ は代数的に独立な元である．生成元 h_i は，「生成多様体」というアイデアを用いて構成された．(2) は Ginzburg によるもので，「幾何的佐武対応」を背景に与えられる同型である．ここに $G^\vee = PGL_n(\mathbb{C})$ であって $e^\vee$ は $\mathfrak{g}^\vee = \mathrm{Lie}(G^\vee)$ の主冪零元を表わしている．$(G^\vee)_{e^\vee}$ はその中心化部分群（加法群 $\mathbb{C}^{n-1}$ と同型）である．$\mathbb{C}[(G^\vee)_{e^\vee}]$ はアフィン座標環の意味である．$(G^\vee)_{e^\vee}$ は次のような行列の集合とみなせる：

$$\begin{pmatrix} 1 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{n-1} \\ 0 & 1 & h_1 & \cdots & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

記号を濫用して h_i という文字を座標関数とみなせば両者の実現はうまく対応する．

(1) は幾何的，(2) は表現論的な実現だとすると，第三の実現として h_i を i 次の完全対称式と同一視することもできる．これは Shimozono, Lam が採用する組合せ論的な見方である．詳しくは述べないが，いま考えている環は可換かつ余可換な Hopf 代数の構造も持っている．特にその余積は (1) の幾何的な意味合い，(2) の可換な代数群の座標環としての意味合い，(3) の対称関数環としての意味合い がすべて一致しているので，三通りの実現は単なる可換環の同型以上の背景がある．

2.2 冪零な戸田格子方程式と旗多様体の量子コホモロジー

三重対角型の Lax 行列 L を用いた Lax 形式で戸田格子方程式を書くと

$$L = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ q_1 & x_2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & q_{n-1} & x_n \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial L}{\partial t_i} = [A_i, L] \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

となる．ここに $\sum_i x_i = 0$ とする．また A_i を L^i の狭義下三角部分とした．$L^n = O$ という冪零条件が生成する $\mathbb{C}[q_1, \ldots, q_{n-1}, x_1, \ldots, x_n]$ のイデアルを I_n とするとき，旗多様体 $\mathrm{Fl}_n = SL_n(\mathbb{C})/B$ の量子コホモロジーに対して

$$QH^*(\mathrm{Fl}_n) = \mathbb{C}[q_1, \ldots, q_{n-1}, x_1, \ldots, x_n]/I_n$$

という実現が知られている．

2.3 タウ関数

冪零な戸田方程式は Schur 関数をタウ関数として解ける．Flaschka の変数変換

$$q_i = \frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i^2}, \quad x_i = \frac{\tau_i'}{\tau_i} - \frac{\tau_{i+1}'}{\tau_{i+1}}$$

によってタウ関数を導入しよう．$\tau_i = \tau_i(t)$ は $t = (t_1, \ldots, t_{n-1})$ の関数であり $\tau_0 = \tau_{n+1} = 1$ と定めている．

λ をヤング図形（partition）とし Schur 関数を $s_\lambda(t) = \det(h_{\lambda_i+j-i}(t))$ と定める．$h_1, h_2, \ldots$ は「完全対称関数」であって，ここでは母関数表示

$$\sum_{i=0}^{\infty} h_i(t) z^i = \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} t_i z^i\right)$$

が定義だと考えていただければよい．

$\tau_i(t) = s_{(n-i)^i}(t)$ とおくと冪零戸田格子方程式の解が得られる．これは「可積分系の世界」（という題名の高崎金久さんの本を見て計算してみてください）では良く知られた事実である．$(n-i)^i$ は縦が i で横が $n-i$ の長方形型のヤング図形を表わす．

3 Schubert 基底とその多項式実現

前節の2つの環のそれぞれについて「Schubert 基底」として現れる多項式を紹介する．ただし，定義を説明するには組合せ論的な準備がいろいろと必要になるので．ここでは名前くらいしか書かない．複雑な定義をフォローするよりも意味が有りそうだと感じることが先だから．

3.1 k-Schur 関数

$H_*(\mathcal{G}_{SL_n})$ の Schubert 基底 $\{\xi_\lambda\}_\lambda$ は $\lambda_1 \le n-1$ をみたすヤング図形 λ（こういうものを $(n-1)$ 有界ヤング図形と呼ぶことにする）によってパラメトライズされる．Shimozono が予想し Lam が解決した結果によると，組合せ論的な実現において k-Schur 関数と呼ばれる対称関数が Schubert 基底と同一視される．k-Schur 関数は k というパラメータを含む対称関数の族 $s_\lambda^{(k)}$ であって $\lambda_1 \le k$ をみたすヤング図形でパラメトライズされるものだが，いまの幾何的な状況には $k = n-1$ があてはまる．$s_\lambda^{(n-1)}$ は $\mathbb{C}[h_1, \ldots, h_{n-1}]$ に属し，基底になっている．§2.1 の (1) あるいは (3) という実現とつじつまが合っている．

3.2 量子 Schubert 多項式

$QH^*(\mathrm{Fl}_n)$ の剰余環としての実現において量子 Schubert 類 σ_w^q $(w \in S_n)$ のよい代表として量子 Schubert 多項式 $\mathfrak{S}_w^q(x) \in \mathbb{Z}[q_1, \ldots, q_{n-1}, x_1, \ldots, x_n]$ が知られている．

4 関係の鍵

2008 年の夏に Lam が来日し，京都の関西セミナーハウス[*3]で彼の講演を聞いた．今回紹介する話題の前段階 [LS0] の結果の報告だった．アフィン・グラスマン多様体のホモロジーにおける Schubert 類のうち基本的なもの（基本コ・ウエイトに対応するもの）が冪零戸田格子方程式のタウ関数と一致しているという現象に気がついたのでその意味を質問した．Ginzburg の論文には，(2) の実現において，この場合の Schubert 類を $G^\vee$ の最高ウエイト表現の行列要素として表示する式がある（それも Lam の講演で知った)．タウ関数を行列要素として書く式は良く知られているので，両者が同じ関数であることは一応説明がつく．しかし，なにかもっと深い意味があるんじゃないかと考えて，その後，名古屋[*4]でも話したのだが，結局，はっきり

*3 Aug. 26-30, 2008, RIMS 合宿セミナー, Crystals and Tropical Combinatorics.

*4 Sep. 1-5, 2008, 名古屋国際数学コンファレンス Combinatorics and Representation Theory.

したことはわからなかった．そのときは，私は Lam の仕事を十分理解していなかったし，Lam の方は戸田格子方程式のことをほとんど何も知らなかったのだ．

いまとなっては次の写像の存在に気が付かなかったのが不思議である：

$$\Phi_n : \mathbb{C}[q_1, \ldots, q_{n-1}, x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow \mathbb{C}[h_1, \ldots, h_{n-1}][\tau_1^{-1}, \ldots, \tau_{n-1}^{-1}]$$

対応は Flaschka の変数変換に冪零戸田格子方程式のタウ関数を代入することで定める．上で基本コ・ウエイトに対応する Schubert 類であると述べた $\tau_i = s_{(n-i)^i}$ は $h_1, \ldots, h_{n-1}$ の多項式であることを確認していただきたい．また，$L^n = O$ が成り立っていることから明らかに $I_n \subset \mathrm{Ker}(\Phi_n)$ である．

これから環同型

$$\Phi_n : QH^*(\mathrm{Fl}_n)[q_1^{-1}, \ldots, q_{n-1}^{-1}] \cong H_*(\mathcal{G}_{SL_n})[\tau_1^{-1}, \ldots, \tau_{n-1}^{-1}]$$

がしたがうことは，少なくとも代数的にはきわめて自然に見える．Peterson 同型として抽象的には知られていたことであるが座標の対応まで明示的に与えられている点が素晴らしい．更に，次の対応まで見せられて唖然としてしまった．

定理 1 ([LS], Lam, Shimozono)**.** $w \in S_n$ に対して，ある $(n-1)$ 有界ヤング図形 $\lambda(w)$ が明示的に定まって

$$\Phi_n(\mathfrak{S}_w^q(x)) = \frac{s_{\lambda(w)}^{(n-1)}}{\prod_{i \in \mathrm{Des}(w)} \tau_i}.$$

ここに $\mathrm{Des}(w)$ は descent set であって $w(i) > w(i+1)$ をみたす $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ の集合と定義される．

背景となる幾何学も十分に解明されているとは到底言えないし，組合せ論の題材もいろいろと出てきそうな話題だと思う．

参考文献

[LS0] T. Lam, M. Shimozono, Quantum cohomology of G/P and homology of affine Grassmannian, Acta. Math., 204 (2010), 49-90.

[LS] T. Lam, M. Shimozono, From quantum Schubert polynomials to k-Schur functions via the Toda lattice, arXiv:1010.4047[math.CO].